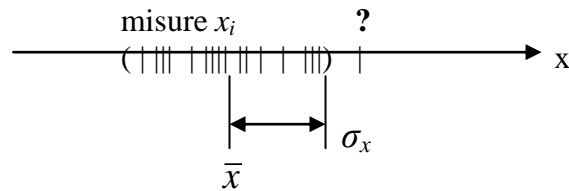
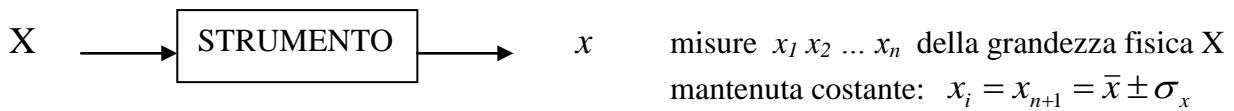




LEZIONE # 5



Le n misure di cui si dispone $x_1 x_2 \dots x_n$ sono valori numerici appartenenti all'insieme dei numeri reali. Sull'ascissa orientata della figura sopra, dove è rappresentato l'intorno delle n misure, vengono istituiti un certo numero di *intervallini* Δ_k , di ampiezza tale che ogni intervallino Δ_k contenga almeno una misura. Il numero dei Δ_k è quindi direttamente proporzionale al numero n di misure, mentre l'ampiezza dei Δ_k risulta inversamente proporzionale ad n . Più dati si hanno a disposizione e più intervallini è possibile istituire, naturalmente con ampiezze sempre più piccole. Sopra ogni intervallino Δ_k si elevi ora un rettangolo con altezza proporzionale al numero di misure che cadono entro l'intervallino stesso. Se le misure di cui si dispone sono *affette solamente da errori casuali*, la figura che ne risulta è sempre molto simile a quella riportata qui sotto; essa prende il nome di **istogramma delle frequenze** di misura. La curva a gradini che delimita l'altezza massima dei rettangoli prende il nome di **curva di distribuzione delle frequenze**.

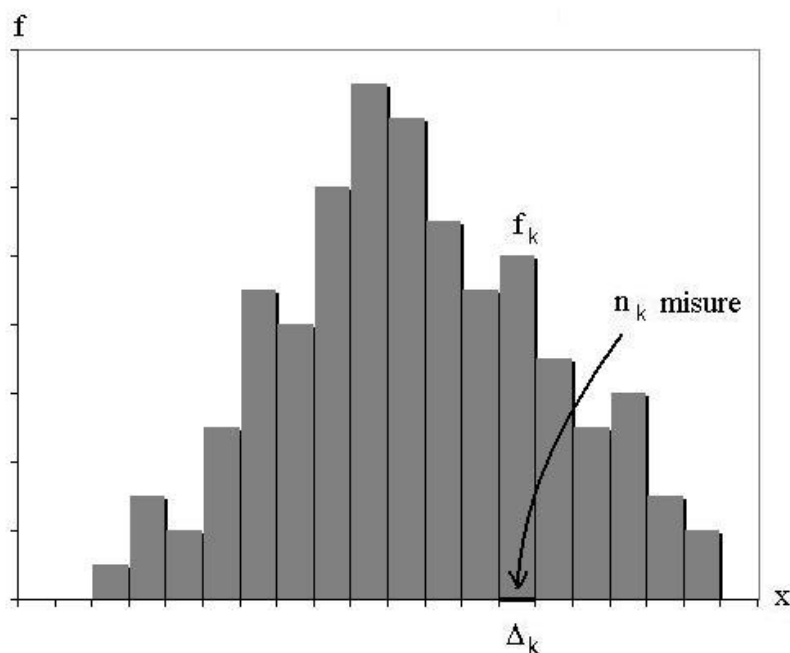


Figura 5.1



I significati delle notazioni riportate nella figura 5.1 sono i seguenti:

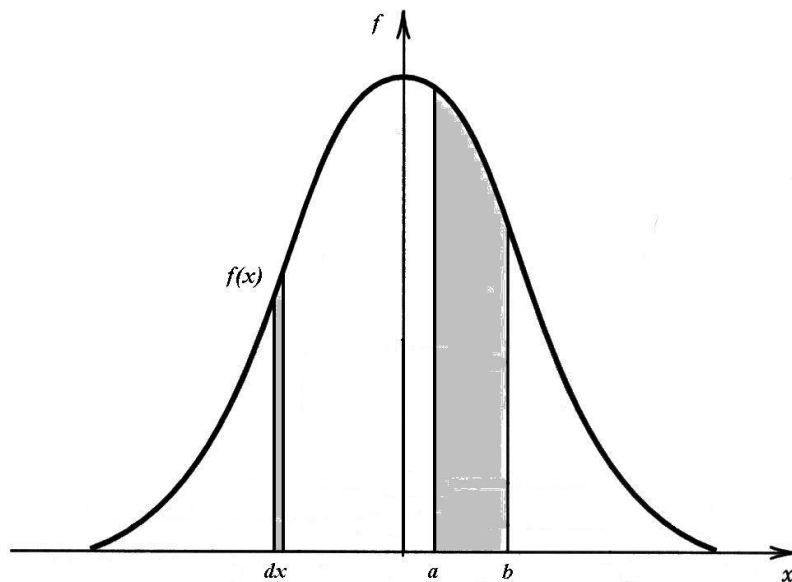
n_k → numero di misure (*osservazioni*) che cadono entro l'intervallo Δ_k
 $f_k = \frac{n_k}{n}$ → *frequenza delle osservazioni* (misure) che cadono entro l'intervallo Δ_k
 ovviamente: $\sum_k n_k = n$ e $\sum_k f_k = 1$

L'istogramma delle frequenze è *normalizzato* per definizione ! L'area $f_k \cdot \Delta_k$ rappresenta invece la *frazione di misure* $0 < xy < 1$ che cadono entro l'intervallo Δ_k .

Si osservi che è possibile esprimere il valor medio come $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{\sum_k x_k n_k}{n} = \sum_k x_k f_k$ dove con x_k si è indicato il miglior rappresentante (il valor medio) delle misure entro l'intervallo Δ_k .

Si immagini ora di poter aumentare a dismisura il numero delle misure, teoricamente si immagini al limite di portare $n \rightarrow \infty$. In tali condizioni (ideali), il numero degli intervallini Δ_k può essere aumentato a dismisura e la loro ampiezza può essere diminuita fino a farli diventare infinitesimi. La *curva di distribuzione delle frequenze* risulterà perciò con i gradini sempre più piccoli ovvero, apparirà sempre più regolare, fino a diventare una **curva di distribuzione limite**.

$n \rightarrow \infty$ $\Delta_k \rightarrow dx$ $f_k \rightarrow f(x)$ che è la *funzione* rappresentativa della *curva di distribuzione limite* !



$f(x)dx$ rappresenta la frazione di misure che cadono entro l'intervallo infinitesimo dx

$\int_a^b f(x)dx$ rappresenta la frazione di misure < 1 che cadono entro l'intervallo finito $(b-a)$

vale la relazione $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

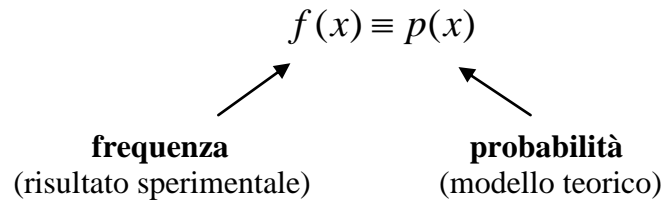
la curva di distribuzione limite è anch'essa *normalizzata*.

Figura 5.2

A questo punto è opportuno riflettere su una circostanza fondamentale: con il passaggio ideale $n \rightarrow \infty$ si è implicitamente abbandonato il mondo sperimentale, dove esistevano le n misure, e si è transitati nel mondo delle idee e dei modelli matematici che le rappresentano. In sostanza, la curva di distribuzione delle frequenze, che era un *risultato sperimentale* a posteriori, è diventata una curva di distribuzione limite e rappresenta ora una **probabilità** ovvero un modello matematico che può essere definito e utilizzato a priori.



solo per $n \rightarrow \infty$



Alcuni autori chiamano questo passaggio "*legge empirica del caso*". Preso atto dell'ambito nel quale ci si sta muovendo, ci si chiede allora quale funzione rappresenta al meglio la curva di distribuzione limite a campana. Come si poteva facilmente supporre osservando la figura di sopra, si tratta della **funzione di distribuzione normale o di Gauss**.

$f(x) = e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$ dove X è il **valore vero** (infatti, per il modello matematico possiamo pensare di avere idealmente a disposizione ∞ misure) e σ è il parametro di larghezza.

Applicando la condizione di normalizzazione $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ si ottiene $f_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$

La curva gaussiana non è l'unica curva di distribuzione limite possibile ma, per misure soggette solamente ad errori casuali la curva limite assume sempre la forma della $f_{X,\sigma}(x)$ centrata su X .

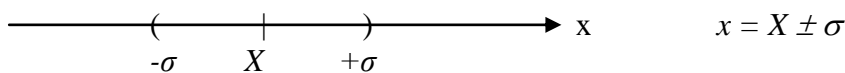
Si calcoli ora per la funzione $f_{X,\sigma}(x)$ il valor medio: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X,\sigma}(x)dx = X$ è la **media** !

Si calcoli quindi lo *scarto quadratico medio*: $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f_{X,\sigma}(x)dx = \sigma^2$ è la **varianza**,

ovvero la **deviazione standard** al quadrato !

Ne consegue immediatamente che "la media è il valore vero" ed il parametro di larghezza σ che compare nella curva limite di Gauss è la *deviazione standard* calcolata per il caso ideale di ∞ misure.

In definitiva, quando ci si riferisce al modello matematico $f_{X,\sigma}(x)$ si può affermare che per la misura di x vale :



Rimane ancora da comprendere quale *fiducia* viene riconosciuta al parametro di larghezza σ .

Sul modello matematico è possibile calcolare gli integrali:

$$\begin{aligned}
 p(x \in \pm\sigma) &= \int_{-\sigma}^{+\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx \\
 p(x \in \pm 2\sigma) &= \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx \\
 p(x \in \pm 3\sigma) &= \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx
 \end{aligned}$$

questi sono integrali che possono essere calcolati, sono tabellati e rappresentano la *probabilità che una misura* (delle infinite virtualmente a disposizione) *cada nell'intervallo* $\pm \sigma$, *oppure* $\pm 2\sigma$, *oppure* $\pm 3\sigma$ attorno al valor vero X .



$$p(x \in \pm k\sigma) = \begin{cases} 68,27\% \rightarrow k = 1 \\ 95,45\% \rightarrow k = 2 \\ 99,73\% \rightarrow k = 3 \end{cases}$$

Il parametro k prende il nome di **fattore di ricopertura** della curva di distribuzione. All'aumentare di k aumenta il **livello di fiducia** che si assegna al parametro di larghezza, dando luogo al concetto di **incertezza estesa** ...

Scrivere $x = X \pm \sigma$ significa affermare che esiste una **probabilità** del 68.3% che la misura i -esima cada entro l'intervallo di incertezza definito da $\bar{x} - \sigma$ e $\bar{x} + \sigma$. In altre parole, si assegna una **fiducia** del 68.3% al fatto di trovare la i -esima misura dentro l'intervallo di incertezza definito da $\bar{x} - \sigma$ e $\bar{x} + \sigma$. Il significato di $p(x \in \pm\sigma)$ è rappresentato geometricamente dall'area sottesa dalla $f(x)$ entro $X \pm \sigma$ ed è riportato in figura 5.3.

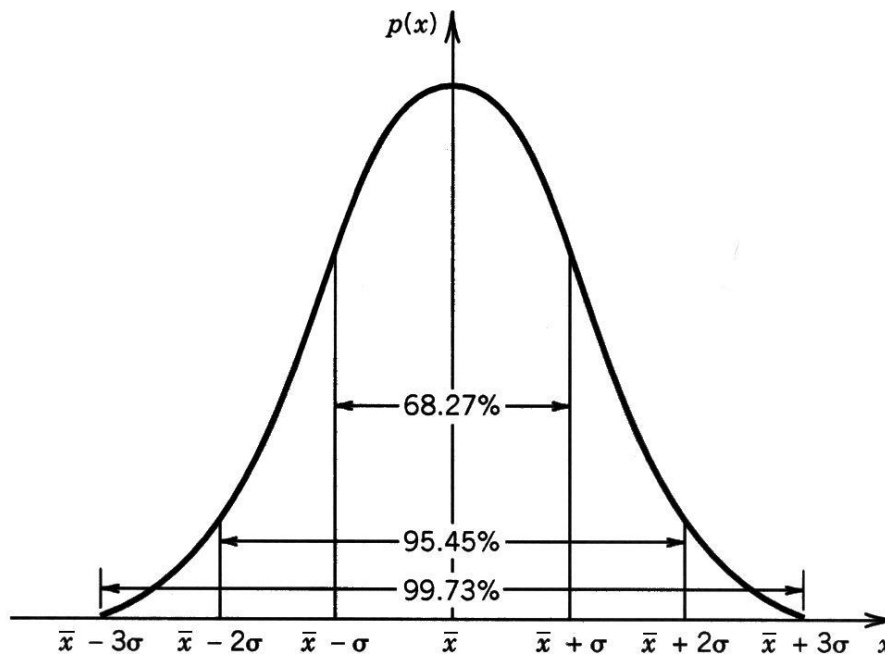


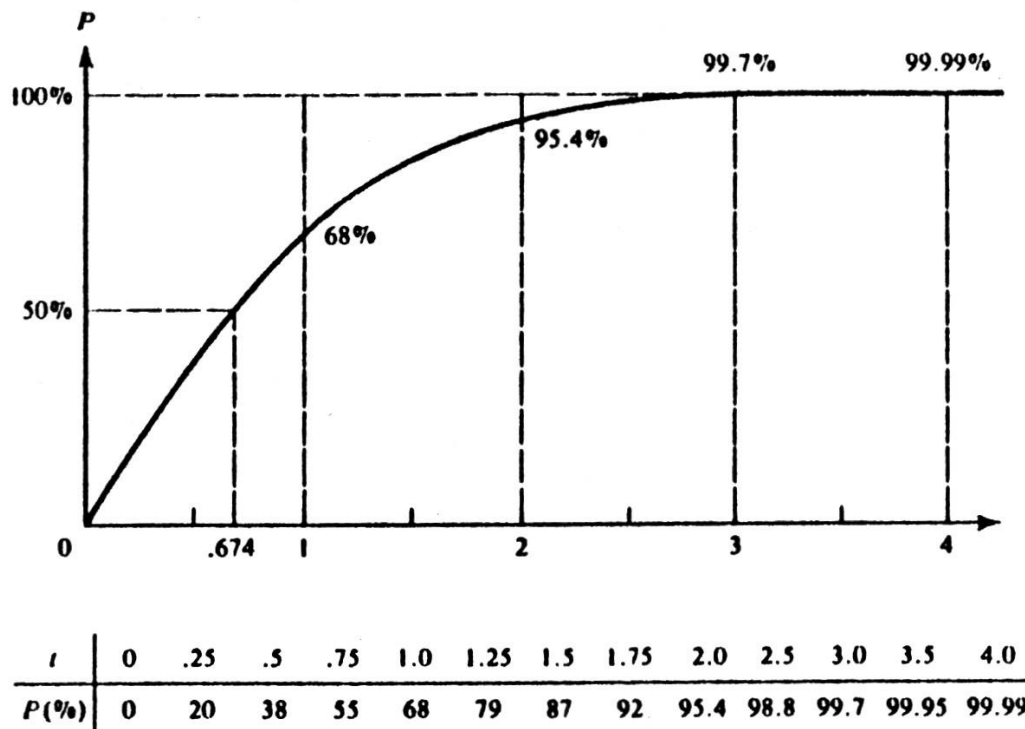
Figura 5.3

Discorso analogo, ma con un **livello di fiducia** (probabilità) maggiore, vale per **fattori di ricopertura** maggiori: $x = X \pm 2\sigma$ e $x = X \pm 3\sigma$. Naturalmente è possibile scegliere **fattori di ricopertura** k (larghezze) qualsiasi per indicare l'ampiezza della fascia di incertezza, anche valori non interi, che portino a una qualsivoglia probabilità. La curva che rappresenta la **probabilità cumulativa** che ha una misura di cadere dentro l'intervallo di incertezza, in funzione della deviazione standard σ è riportata in figura 5.4.

Si osservi che dopo un certo valore di σ ($=3$), la curva in figura 5.4 tende ad appiattirsi, senza dare più incrementi significativi della probabilità quando aumenta il fattore di ricopertura k . Per questo motivo, quando è richiesto che la fascia di incertezza contenga con ragionevole sicurezza tutte le misure, è buona norma definire la fascia stessa con $x = X \pm 3\sigma$, ovvero con $k = 3$.

$x = X \pm \sigma$ è una **probabilità** (un modello matematico utilizzabile *a priori*)

$x = \bar{x} \pm \sigma_x$ è una **statistica** (un modello sperimentale calcolato *a posteriori*)



Probabilità che un valore misurato sia compreso entro prefissati valori del parametro σ .

Figura 5.4

Si ribadisce ancora una volta che tutto quanto detto a proposito di fiducia e probabilità è stato ricavato sulla base virtuale della disponibilità di ∞ misure. A tale proposito, occorre sempre adottare una certa cautela nell'extrapolare i valori teorici di probabilità ai casi reali, dove si dispone sempre solo di un numero n "finito" di misure. La situazione è particolarmente delicata quando con le n misure a disposizione non si raggiunge una ragionevole confidenza che la distribuzione dei dati sia effettivamente gaussiana. Esistono delle tecniche statistiche (*test del χ^2*) che forniscono una stima di quanto bene la curva di distribuzione delle frequenze proveniente dalle misure può essere "immedesimata" con la curva di distribuzione limite di Gauss.

Anche quando la distribuzione delle n misure dovesse avere un buon accordo con la curva di distribuzione limite (gaussiana), i valori numerici di \bar{x} e σ_x calcolati a partire da n misure possono differire dalla media X e dalla deviazione standard σ della corrispondente curva gaussiana. Esistono particolari curve di distribuzione (*t di Student*) che permettono di correggere i valori di probabilità e di confidenza associati al parametro σ_x calcolato in base alle n misure disponibili. Lo studio di tali tecniche esula dai limiti di questi appunti.

All'aumentare del numero n di misure, la deviazione standard σ_x non cambia sostanzialmente di valore. Anche per questo motivo, con la relazione $x = \bar{x} \pm \sigma_x$ si valuta efficacemente la **precisione dello strumento**. Per mezzo della σ_x è possibile confrontare immediatamente la precisione di due strumenti già ad occhio, confrontando la forma stessa della curva gaussiana che ne rappresenta la curva di distribuzione delle frequenze:

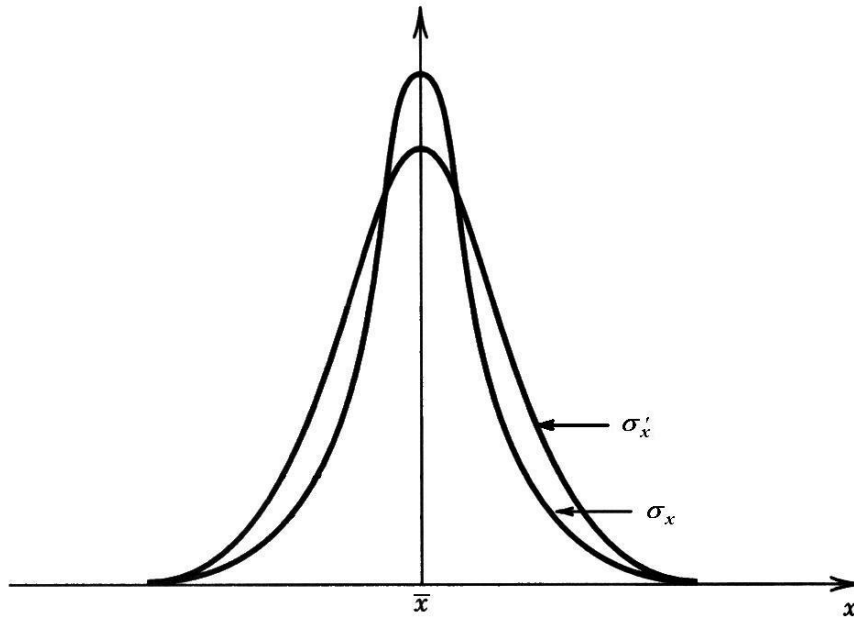


Figura 5.5

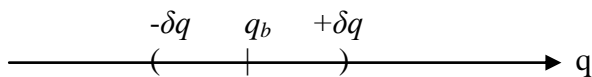
lo strumento che risulta avere una distribuzione più alta e più stretta (σ_x più piccolo di σ'_x) è lo strumento più preciso.

Essendo $\bar{x} \neq X$, si cercherà ora di capire se è possibile stimare quanto bene il valor medio \bar{x} calcolato dai dati $x_1 x_2 \dots x_n$ rappresenta il valor vero X ovvero se è possibile estrarre dal gruppo delle n misure informazioni a proposito della **precisione della misura**.

- PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI (cenni)

Si è già detto che una *misura indiretta* viene eseguita “componendo” i dati provenienti dalle misure delle grandezze primarie.

Ad esempio, per una grandezza $q = x + y$ esprimibile per mezzo della somma di due grandezze primarie, si misura $x = x_b \pm \delta x$ e $y = y_b \pm \delta y$. Si è interessati a trovare $q = q_b \pm \delta q$.



Si potrebbe scegliere:

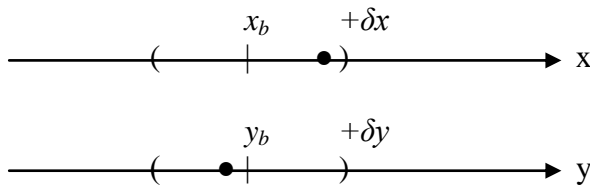
per $q_b = x_b + y_b$

- $x_b + y_b + (\delta x + \delta y)$ che rappresenta il *limite superiore* dell'intorno
- $x_b + y_b - (\delta x + \delta y)$ che rappresenta il *limite inferiore* dell'intorno

da quanto scritto, si potrebbe essere indotti a scegliere per $\delta q = \delta x + \delta y$ ma, se le cause d'errore δx e δy sono *indipendenti*, la $\delta q = \delta x + \delta y$ è una *sovraslima* per l'ampiezza della fascia di incertezza.

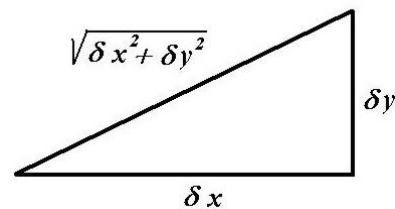


Per avere effettivamente $\delta q = \delta x + \delta y$ si dovrebbe sempre contemporaneamente sottostimare o sovrastimare la misura di x e quella di y . Questa "sistematica contemporaneità" è assai improbabile. In alcuni casi ciò può anche accadere ma, in generale, ad una sovrastima di x si accompagna una sottostima di y , o viceversa.



In generale quindi, si ha una parziale cancellazione delle incertezze. Ecco perché, se le incertezze di x ed y non sono dipendenti tra loro, ovvero se le misure di x ed y hanno cause d'errore indipendenti, è molto più logico porre:

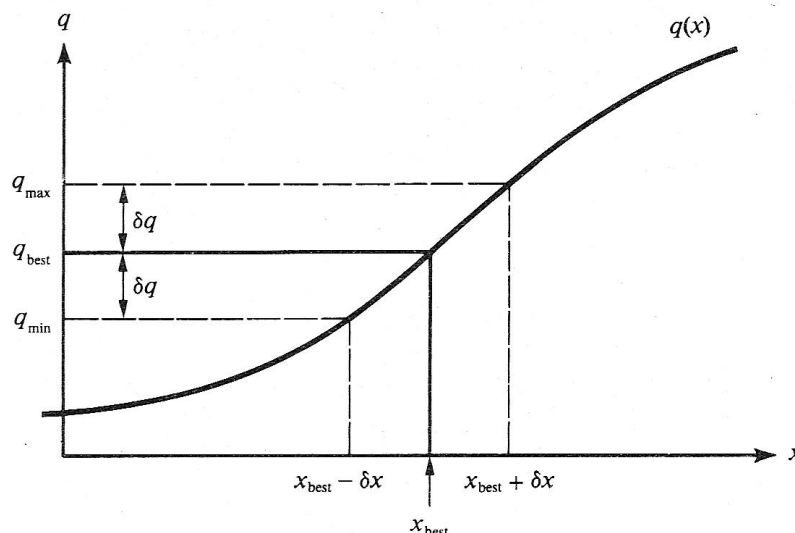
$$\delta q = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} < \delta x + \delta y$$



Lo stesso discorso vale per misure che provengono da prodotti o quozienti $q = x \cdot y$, solamente che in questo caso si considerano gli errori relativi e la relazione diviene (si dim. attraverso il "teorema binomiale") :

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}$$

In generale, per funzioni arbitrarie di una variabile $q = q(x)$ (ad esempio $q(x) = 1/\text{sen}x$) è possibile misurare $x = x_b \pm \delta x$ e calcolare $q_b = q(x_b)$ secondo la relazione funzionale. Ma come si calcola δq ?



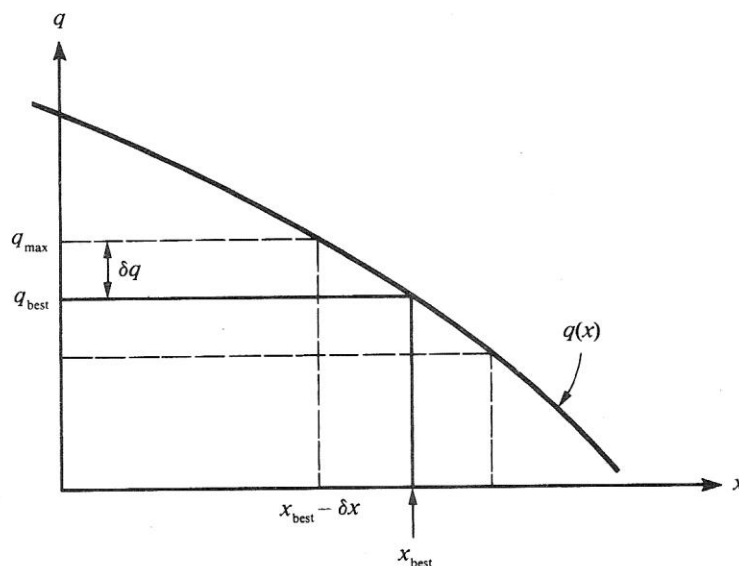


Se δx è piccolo, come deve essere nel caso di soli errori casuali, q_{min} e q_{max} sono praticamente equispaziati di un piccolo δq attorno al valore calcolato q_b . Questa circostanza ci consente di scrivere $\delta q = q(x_b + \delta x) - q(x_b)$ che per $\delta x \rightarrow$ piccolo, possiamo anche scrivere nel modo seguente:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta q}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{q(x_b + \delta x) - q(x_b)}{\delta x} = \frac{dq}{dx} \quad \text{è la *derivata* della funzione } q(x) \text{ calcolata nel punto } x_b .$$

Vale quindi la importante relazione:
$$\delta q = \frac{dq}{dx} \cdot \delta x$$

Più in generale, per includere anche il caso di funzione $q(x)$ decrescente nel punto x_b , ovvero con derivata $\frac{dq}{dx} < 0$ nel punto x_b



è opportuno correggere la relazione appena ricavata con il valore assoluto:
$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \cdot \delta x$$

Quando si ha a che fare con grandezze fisiche q che possono essere rappresentate per mezzo di una funzione qualunque di due o più variabili, ad es. $q = q(x, y)$ e si misurano le grandezze primarie x ed y , occorre prestare particolare attenzione a possibili “effetti di compensazione” degli errori per cui, nella determinazione delle *incertezze combinate*, piuttosto che procedere passo-passo, si preferisce ricorrere alla formula generale ricavata in analogia con il caso della funzione di una sola variabile: si misurano $x = x_b \pm \delta x$ e $y = y_b \pm \delta y$ dalle quali si ricava $q_b = q(x_b, y_b)$, mentre per δq si

potrebbe porre in sovrapposizione degli effetti:
$$\delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \cdot \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \cdot \delta y$$

Ma, come già detto per la somma semplice, se le misure di x e y sono *indipendenti*, e quindi è ragionevole ritenere indipendenti anche le loro cause di errore, questa posizione produce al più un *limite massimo* per il parametro di larghezza δq . E' più corretto considerare anche qui la somma in quadratura:



$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \delta y\right)^2}$$

aggiungendo via via altri termini se la grandezza risulta essere funzione di tre o più variabili. Si faccia attenzione al fatto che i parametri di larghezza utilizzati per x ed y , altro non sono che le *deviazioni standard* con il significato di incertezza ad esse associato: $\delta x = \sigma_x$ e $\delta y = \sigma_y$. La relazione scritta sopra per il caso di due sole variabili (misure) indipendenti, rappresenta la relazione generale della **propagazione degli errori (incertezze)**.

Per stimare l'incertezza di \bar{x} nel rappresentare X (valore vero), si suddividano a caso le misure a disposizione in m gruppi, ciascuno costituito da n misure, oppure si eseguano dal principio m gruppi di n misure, e se ne calcolino gli m valori medi:

$$\begin{array}{ll} x_1' x_2' \dots x_n' & \rightarrow \bar{x}' \\ x_1'' x_2'' \dots x_n'' & \rightarrow \bar{x}'' \\ \dots & \\ x_1^{(m)} x_2^{(m)} \dots x_n^{(m)} & \rightarrow \bar{x}^{(m)} \end{array}$$

il miglior rappresentante delle m medie sarà il valor medio delle medie:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}^j \quad \text{dove} \quad \bar{x}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j$$

Se il valor vero delle $m \times n$ misure x_i^j è X , anche il valor vero delle m medie \bar{x}^j è X , dato che esse provengono dalle stesse misure.

Se le $m \times n$ misure x_i^j sono affette solamente da errori casuali, ciascuna delle curve di distribuzione per gli m gruppi di n misure sarà una *curva normale di Gauss*. Quindi, anche le m medie \bar{x}^j saranno distribuite normalmente attorno alla media delle medie $\bar{\bar{x}}$, questo perché ciascuna delle m medie $\bar{x}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j = f(x_i^j)$ è essa stessa funzione delle n misure x_i^j .

Nella figura 5.6 di sotto, la distribuzione delle medie è quella tratteggiata

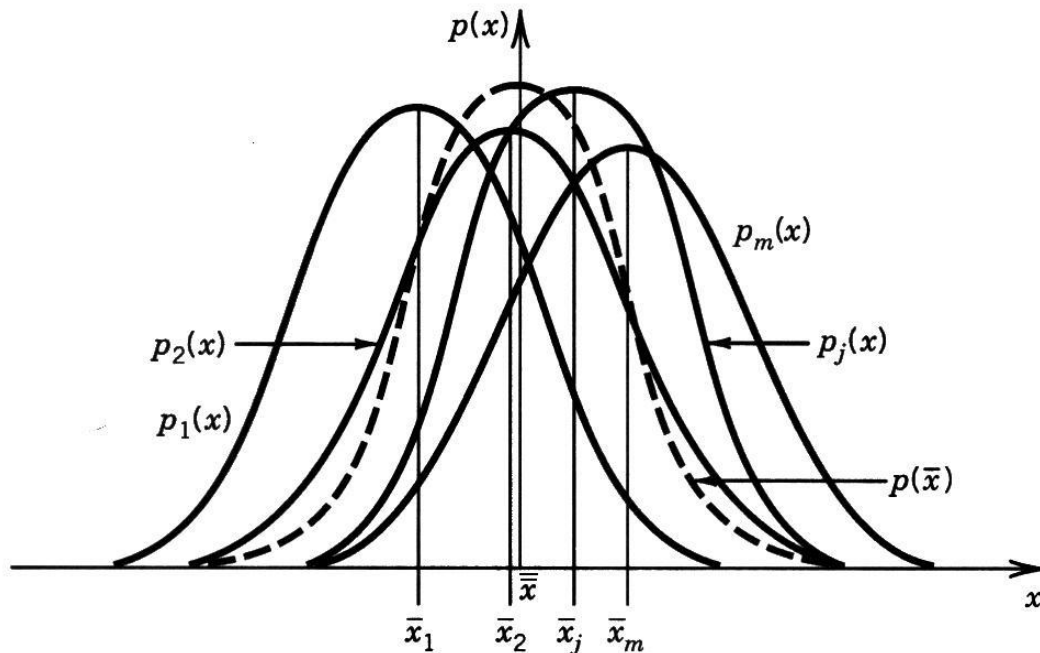


Figura 5.6

ma allora, il parametro di larghezza per la distribuzione delle m medie \bar{x}^j sarà:

$$\delta\bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_2} \delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2} \quad \text{la deviazione standard della media !}$$

In questa relazione i parametri di larghezza δx_i sono la deviazione standard $\sigma_x^{(j)}$ calcolata con le misure del generico gruppo j -esimo; ma x_i^j sono tutte misure di una stessa grandezza e, anche se sono state suddivise in m gruppi, al crescere di n non c'è motivo di dubitare che le deviazioni standard calcolate per i diversi gruppi siano sempre più coincidenti con la deviazione standard di tutte le $m \times n$ misure $\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)} = \dots = \sigma_x^{(n)} = \sigma_x$.

Dalla relazione $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ si ricava poi facilmente che: $\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial\bar{x}}{\partial x_n} = \frac{1}{n}$

Con tali posizioni inserite nella relazione della deviazione standard della media rimane:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sigma_x\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} \sigma_x\right)^2} = \sqrt{n \cdot \frac{\sigma_x^2}{n^2}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \text{che è l'errore standard o scarto tipo !}$$

Si osservi subito attentamente che l'errore standard può essere calcolato con i dati provenienti da un solo gruppo di n misure.

Ciò non di meno, per il modo con cui è stato ricavato, esso è una stima dell'*incertezza* con la quale il *valor medio rappresenta il valor vero*. Si osservi infatti che se, con il medesimo strumento di misura si aumenta il numero n delle misure, la deviazione standard rimane pressoché invariata mentre l'errore standard diminuisce !



Acquisire un quantitativo d'informazione maggiore *migliora la misura*, ma non "migliora lo strumento" con il quale si effettuano dette misure.

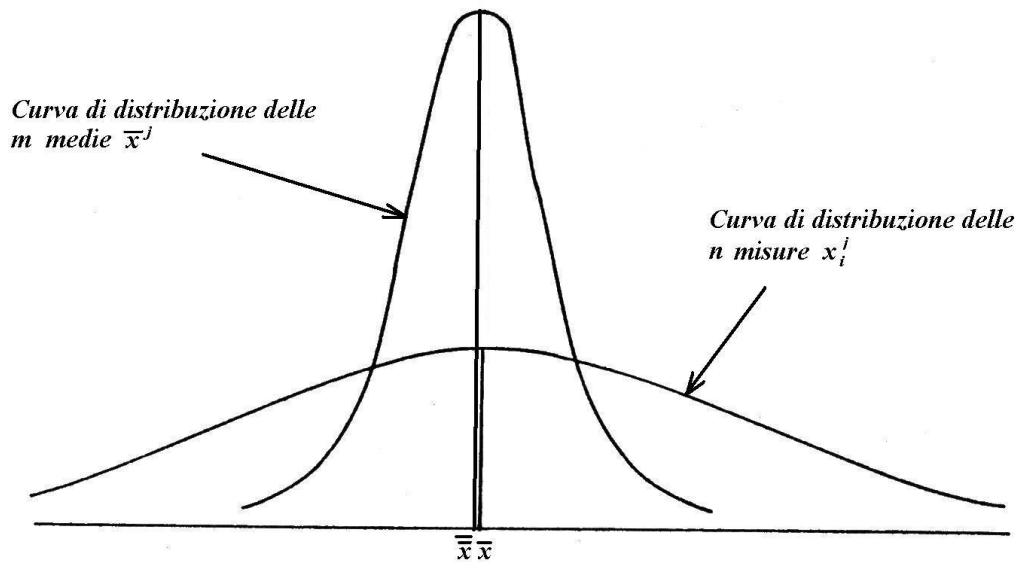


Figura 5.7

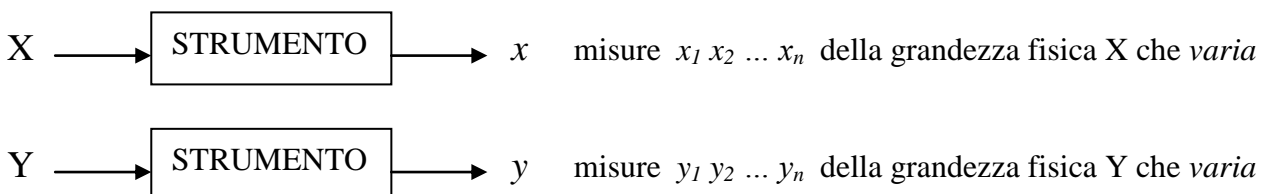
La figura 5.7 descrive in termini di curve di distribuzione quello che la definizione stessa dei due parametri di larghezza già esprime chiaramente: per una misura effettuata con un dato strumento, l'*errore standard* è sempre molto minore della *deviazione standard* !

In conclusione, ecco perché si distingue :

x_i o $x_{n+1} = \bar{x} \pm \sigma_x$ la *deviazione standard* esprime la **precisione dello strumento**
 $x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ l'*errore standard* esprime la **precisione della misura**

- **REGRESSIONE LINEARE** (cenni)

Si supponga di voler confrontare due misure di due grandezze fisiche X e Y che stanno evolvendo nel tempo e variano la loro intensità. Potrebbe avere interesse studiare l'eventuale legame o la relazione che esiste tra le due grandezze in esame:

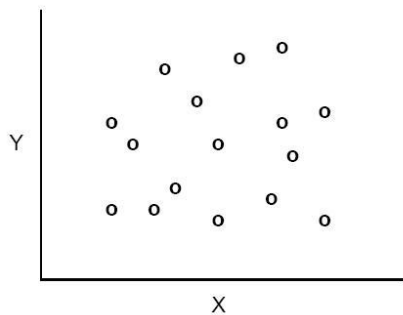


Occorre effettuare n coppie di misure $(x_i ; y_i)$ avendo cura di misurare simultaneamente i valori di X ed Y. Si osservi attentamente che le grandezze X e Y in questo caso non sono mantenute costanti. Oppure, più semplicemente, si supponga di voler studiare se è possibile fare una misura (indiretta) della grandezza Y attraverso un'altra grandezza X, ad essa in qualche modo "collegata". In questo



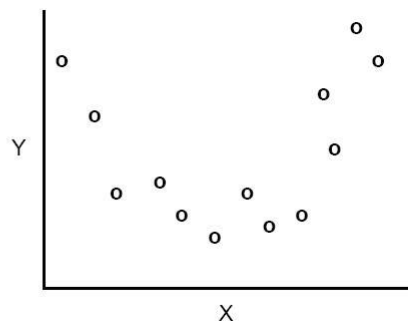
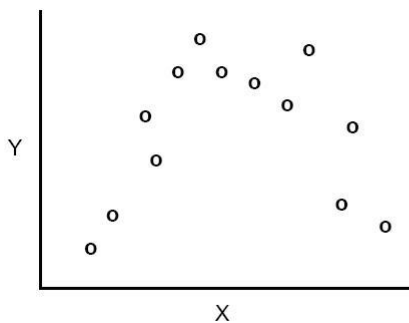
caso, si sospetta già in partenza l'esistenza di una relazione tra le due grandezze X ed Y, della quale però non si conosce la legge.

Per tutti i casi come quelli ipotizzati sopra, dove interessa studiare la possibile relazione tra due misure x ed y , la prima cosa che occorre fare è rappresentare le coppie di dati $(x ; y)$ su un piano cartesiano, andando così a formare il **diagramma di dispersione (scatter-plot)**:



Se la figura che rappresenta tutte le coppie $(x ; y)$ dovesse apparire simile a quella riportata qui di fianco, si potrebbe cominciare ad ipotizzare che tra le due grandezze X ed Y in esame non esiste alcuna relazione.

Se il diagramma di dispersione dovesse assomigliare invece ad una delle due figure riportate sotto, si potrebbe cominciare a supporre l'esistenza di una qualche relazione tra le due grandezze X ed Y.



Si nota chiaramente che il diagramma di dispersione dei punti $(x ; y)$ va a formare una figura convessa a sinistra ed una figura concava a destra.

Ma il caso più fortunato, e anche il più frequente nelle applicazioni, è quello rappresentato qui sotto nella figura 5.8, dove i punti $(x ; y)$ vanno a formare una figura allungata che indica chiaramente una *tendenza*, ovvero una relazione lineare tra le grandezze X ed Y:

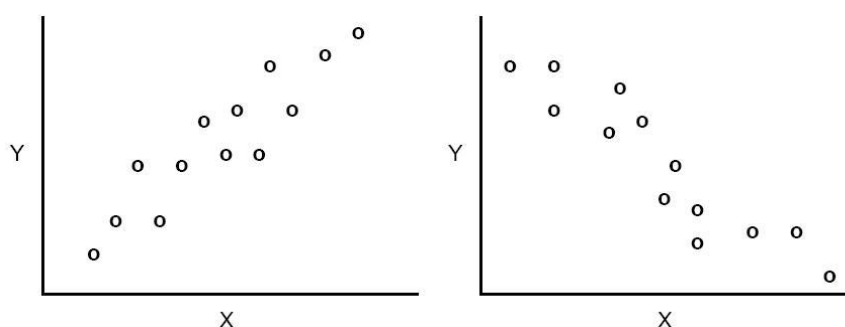


Figura 5.8

Quando si è abbastanza soddisfatti della linearità evidenziata dall'insieme di dati $(x ; y)$ sul diagramma di dispersione è possibile chiedersi quale sia la retta che meglio "modella" i punti rappresentati sul grafico. Per rispondere a questa domanda occorre ricavare l'equazione che meglio rappresenta la relazione lineare tra le due grandezze.

A causa delle incertezze sperimentali, è assolutamente improbabile che tutti i punti di un grafico giacciono esattamente su una retta per cui, spetterà all'abilità dello sperimentatore trovare quale sia



quella retta che meglio si adatta alla distribuzione dei punti, ossia quella retta che meglio *interpola* i punti del grafico. Tale retta è detta **retta di "best fit"**.

Nel primo grafico della figura 5.9 sottostante sono disegnate le *rette limite*, cioè le rette aventi la massima e la minima pendenza tra tutte quelle che si adattano ai punti del grafico, mentre il secondo rappresenta proprio la retta di miglior interpolazione (best fit).

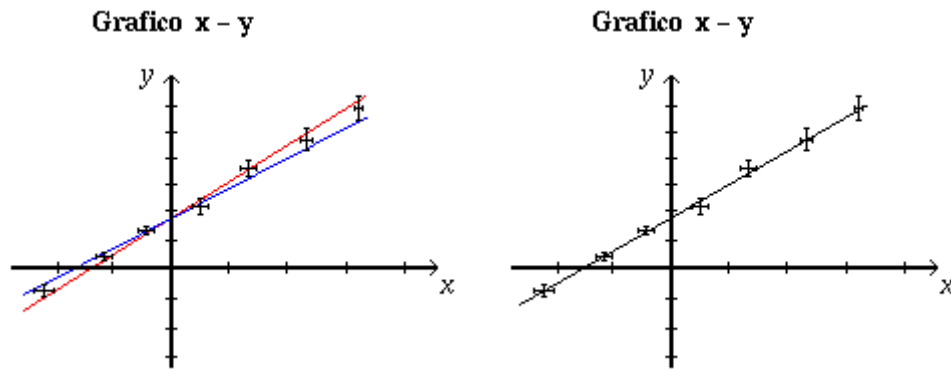


Figura 5.9

Si accennerà ora al metodo analitico adatto a ricavare la miglior linea retta che interpola una serie di punti sperimentali. Tale metodo viene universalmente chiamato **regressione lineare**.

Per semplificare la trattazione, si assuma d'ora in avanti che le misure abbiano incertezze solo sulle grandezza in ordinata (y) e che tutte le incertezze sulle misure y possano essere considerate uguali. Altro assunto, peraltro ragionevole, sarà che ogni misura in y sia governata dalla distribuzione di Gauss, con lo stesso parametro di larghezza σ_y per tutte le misure. La situazione è rappresentata sotto in figura 5.10

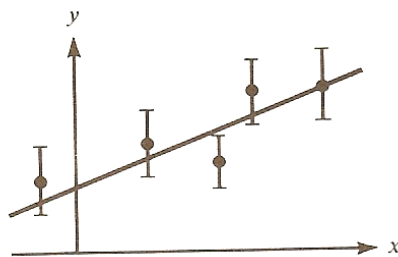


Figura 5.10

Quello che si vuole determinare sono le due costanti A e B che determinano la migliore retta di interpolazione avente l'equazione: $y = Ax + B$

Se si conoscono le costanti A e B allora per ogni singolo valore x_i si può calcolare il corrispondente valore nominale di y_i come: $y_i = Ax_i + B$

Poiché la misura y_i è governata da una distribuzione normale centrata sul valore vero (nominale) con parametro σ_y , la probabilità di ottenere il valore osservato y_i è

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-\frac{(y_i - Ax_i - B)^2}{2\sigma_y^2}}$$

dove i pedici A e B indicano che questa probabilità dipende dai loro valori, che sono incogniti. La probabilità di ottenere l'insieme completo dei valori osservati $y_1 y_2 \dots y_n$ è



$$P_{A,B}(y_1, y_2, \dots, y_n) = P_{A,B}(y_1) \times P_{A,B}(y_2) \times \dots \times P_{A,B}(y_n) \propto \frac{1}{\sigma_y^n} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

dove l'esponente è dato dalla relazione :
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - Ax_i - B)^2}{\sigma_y^2}$$

Gli y_i sono i valori effettivamente osservati con le misure, quindi le migliori stime per le costanti A e B si ottengono imponendo che la probabilità $P_{A,B}(y_1, y_2 \dots y_n)$ sia massima: questo equivale ad imporre che la somma dei quadrati nell'esponente sia minima. Per trovare tali valori si differenzia χ^2 rispetto ad A e B e si impongono le derivate uguali a zero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \left(-\frac{2}{\sigma_y^2} \right) \sum_{i=1}^n x_i (y_i - Ax_i - B) = 0$$

e

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \left(-\frac{2}{\sigma_y^2} \right) \sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B) = 0$$

Queste due equazioni possono essere riscritte come

$$A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

e

$$A \sum_{i=1}^n x_i + Bn = \sum_{i=1}^n y_i$$

Tali equazioni, note anche come *equazioni normali*, una volta risolte, forniscono la migliore stima delle costanti A e B :

$$A = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2} \quad e \quad B = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$

Il metodo appena esposto è una semplice estensione del ben noto **metodo dei minimi quadrati**.

Calcolate le miglior stime delle costanti A e B dai valori misurati $(x_i ; y_i)$ viene spontaneo chiedersi quali siano le incertezze nelle nostre stime. Prima di passare al calcolo vero e proprio delle incertezze sulle stime di A e di B è bene chiarire alcuni punti sull'incertezza σ_y .

Bisogna ricordare che le $y_1, y_2 \dots y_n$ non sono n misure della stessa grandezza Y mantenuta costante; non è quindi possibile farsi un'idea della loro affidabilità solamente esaminando lo "sparpagliamento" dei loro valori. E' possibile però stimare l'incertezza σ_y nel modo seguente. Partendo dall'assunto che ogni misura y_i è normalmente distribuita attorno al suo valore nominale Ax_i+B , anche le singole *deviazioni* $d = y_i - (Ax_i + B)$ sono normalmente distribuite, con lo stesso



valore medio 0 e la stessa larghezza σ_y . Questa circostanza suggerisce che una buona stima per σ_y dovrebbe essere data dalla somma del quadrato degli scarti nella forma:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B)^2$$

Tale stima, però, necessita di essere ulteriormente raffinata; infatti i valori veri delle costanti A e B non si conoscono ed essi vengono rimpiazzati con le migliori stime. Questa sostituzione riduce leggermente il valore precedentemente definito di σ_y . Si può dimostrare che è possibile compensare tale riduzione sostituendo il fattore n del denominatore con il nuovo fattore $n-2$, ottenendo così il risultato finale per σ_y :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B)^2$$

A questo punto si può passare al calcolo vero e proprio delle incertezze sulle costanti A e B. Essendo le stime di A e di B funzioni ben definite dei valori misurati $y_1, y_2 \dots y_n$, le incertezze su tali stime si calcolano applicando la *propagazione degli errori* in termini di quelli per $y_1, y_2 \dots y_n$, quindi si ottiene:

$$\sigma_A^2 = \frac{n\sigma_y^2}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2} \quad \text{e} \quad \sigma_B^2 = \frac{\sigma_y^2 \sum_i x_i^2}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$

Note:

Figure 5.2; 5.4; 5.7 courtesy of:
Branca F.P. – *Misure Meccaniche* – ed. ESA

Figure 5.3; 5.5; 5.6 courtesy of:
Figliola, Beasley – *Theory and Design for Mechanical Measurement* – John Wiley & Sons, Inc.

Figure 5.9; 5.10 courtesy of:
Taylor J.R. – *Introduzione all'analisi degli errori* – Zanichelli